VJEŽBE IZ MATEMATIKE 2

Ivana Baranović
Miroslav Jerković

Lekcija 1

Neodređeni inetegral i metode računanja

Poglavlje 1

Integral

1.1 Neodređeni integral

Neka je zadana funkcija $f : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$: Funkcija $F : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ za koju je $F'(x) = f(x)$ za svaki $x \in (a, b)$ naziva se **primitivna funkcija** (antiderivacija) funkcije f.

Primjer 1 Odredite neku primitivnu funkciju slijedećih funkcija:

(a) $f(x) = x^2$

(b) $f(x) = \frac{1}{\sqrt{x}}$

(c) $f(x) = 2^x$

(d) $f(x) = \frac{1}{x}$

(e) $f(x) = e^x$

(f) $f(x) = \sin x$

Rješenje:

(a) Tražimo neku funkciju koja derivirana daje x^2. Kako znamo da je $(x^3)' = 3x^2$, vidimo da je jedno rješenje $F(x) = \frac{x^3}{3}$. Primjetimo da smo tom rješenju mogli dodati bilo koji konstantu jer $(const)' = 0$. Tako je rješenje i npr. $F(x) = \frac{x^3}{3} + 2$.

(b) Znamo da je $(x^{\frac{1}{2}})' = \frac{1}{2}x^{-\frac{1}{2}}$ pa je jedno od rješenja $F(x) = 2x^{\frac{1}{2}} + 1$.

(c) Npr. $F(x) = (\frac{1}{\ln 2})2^x + e$ jer $(2^x)' = (\ln 2)2^x$.

(d) $F(x) = \ln x$. Ovdje je rješenje npr. i $F(x) = \ln(2x)$ jer $\ln(2x) = \ln 2 + \ln x$ pa $(\ln(2x))' = (ln2 + \ln x)' = (\ln x)' = \frac{1}{x}$

(e) $F(x) = e^x + 4$.

(f) $F(x) = -\cos x$.

Definicija 1.1.1 *Za zadanu funkciju $f(x) : (a, b) \longrightarrow \mathbb{R}$ familija $\{F(x)|F'(x) = f(x), x \in (a, b)\}$ svih primitivnih funkcija te funkcije zove se **neodređeni integral** funkcije f i označava se sa $\int f(x)dx$.*

Primjer 2 Odredite slijedeće neodređene integrale:

(a) $\int(x^2+x+1)dx$ (c) $\int \frac{dx}{x+2}$

(b) $\int(\sqrt{x}+\cos x)dx$ (d) $\int \frac{dx}{1+x^2}$

Rješenje:

(a) Tražimo, kao i prije, funkciju koja derivirana daje x^2+x+1 i znamo da možemo dodati proizvoljnu konstantu. Stoga je rješenje: $\int(x^2+x+1)dx = \frac{1}{3}x^3+\frac{1}{2}x^2+x+C$ gdje je C proizvoljna konstanta.

(b) $\int(\sqrt{x}+\cos x)dx = \frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}}+\sin x+C$

(c) $\int \frac{dx}{x+2} = \ln(|x+2|+C = \begin{cases} \ln(x+2)+C, & x>-2 \\ \ln(-(x+2))+C, & x<-2. \end{cases}$

(d) $\int \frac{dx}{1+x^2} = \arctan x + C$

Osnovna svojstva integriranja: iz definicije neodređenog integrala i svojstava derivacije lako se vidi da vrijede sljedeće formule:

1) $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$,

2) $\int(\lambda f(x)+\mu g(x))dx = \lambda\int f(x)dx + \mu\int g(x)dx$,

3) $\int f(\phi(x))\phi'(x)dx = \int f(t)dt = F(t)+C$.

Zadatak 3 Provjerite da vrijede slijedeće jednakosti:

(a) $\int(\sqrt[3]{x})'dx = \sqrt[3]{x}+C$ (c) $\left(\int \frac{dx}{\cos^2 x}\right)' = \frac{1}{\cos^2 x}$

(b) $\int(\cos^2 x)'dx = \cos^2 x + C$ (d) $\left(\int \frac{\sin x}{x}\, dx\right)' = \frac{\sin x}{x}$

Rješenje:

(a) Imamo: $\int(\sqrt[3]{x})'dx = \int \frac{1}{3}x^{-\frac{2}{3}}dx = \frac{1}{3}\int x^{-\frac{2}{3}}dx = \sqrt[3]{x}+C$.

(c) Ovdje možemo koristiti definiciju neodređenog integrala i zaključak izvesti direktno ili računati:

$$\left(\int \frac{dx}{\cos^2 x}\right)' = (\tan x + C)' = \frac{1}{\cos^2 x}.$$

(d) Koristimo definiciju neodređenog integrala.

Zadatak 4 Vrijedi li jednakost: $\left(\int f(x)dx\right)' = \int f'(x)dx$?

Rješenje: Ne. Naime, $\left(\int f(x)dx\right)' = f(x)$ dok s druge strane imamo: $\int f'(x)dx = f(x)+C$. Uzmimo, npr. $f(x)=x$:

$$\left(\int f(x)dx\right)' = \left(\int xdx\right)' = (\frac{1}{2}x^2+C)' = x$$

i

$$\int f'(x)dx = \int(x)'dx = \int dx = x+C$$

pa, ako uzmemo $C \neq 0$ jednakost ne vrijedi.

Zadatak 5 Koristeći svojstva integriranja, nađite sljedeće integrale:

(a) $\int (2x^2+1)^3 dx$ (b) $\int (2x^2+1)^{46} x dx$

Rješenje:

(a) $\int (2x^2+1)^3 dx = \int (8x^6+12x^4+6x^2+1)dx = \frac{8}{7}x^7 + \frac{12}{5}x^5 + \frac{6}{3}x^3 + x + C,$

(b) $\int (2x^2+1)^{46} x dx = \int (2x^2+1)^{46} \frac{1}{4} d(2x^2+1) = \frac{1}{4}\int (2x^2+1)^{46} d(2x^2+1) = \frac{1}{4}\frac{(2x^2+1)^{47}}{47} + C = \frac{1}{188}(2x^2+1)^{47} + C$

Napomena: U zadatku (b) smo, ustvari, proveli zamjenu varijabli (vidi poglavlje Metoda supstitucije), $t = 2x^2+1$.

Zadatak 6 Nađite integrale:

(a) $\int \frac{(x+1)(x^2-3)}{3x^2} dx$ (c) $\int \frac{x^2+1}{x-1} dx$

(b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}}$

Rješenje:

(b)

$$\begin{aligned}
\int \frac{dx}{\sqrt{x+1}+\sqrt{x-1}} &= \int \frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{2}dx = \frac{1}{2}\int \sqrt{x+1}dx - \frac{1}{2}\int \sqrt{x-1}dx = \\
&= \frac{1}{2}\int \sqrt{x+1}d(x+1) - \frac{1}{2}\int \sqrt{x-1}d(x-1) = \\
&= \frac{1}{3}\sqrt{(x+1)^3} - \frac{1}{3}\sqrt{(x-1)^3} + C
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2+1}{x-1}dx &= \text{podijelimo ta dva polinoma } = \int (x+1+\frac{2}{x-1}dx = \\
&= x^2 + x + 2\ln(x-1) + C
\end{aligned}$$

Zadatak 7 Nađite integrale:

(a) $\int 3^x e^x dx$ (c) $\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x} dx$

(b) $\int 7^x 3^{-x} dx$

Rješenje:

(a)

$$\begin{aligned}
\int 3^x e^x dx &= \int e^{x\ln 3} e^x dx = \int e^{(1+\ln 3)x} dx = \\
&= \frac{1}{1+\ln 3}\int e^{(1+\ln 3)x} d((1+\ln 3)x) = \frac{e^{(1+\ln 3)x}}{1+\ln 3} + C
\end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned}\int \frac{2^{x+1}-5^{x-1}}{10^x}dx &= \int\left(2\left(\frac{2}{10}\right)^x-\frac{1}{5}\left(\frac{5}{10}\right)^{x-1}\right)dx = 2\int\left(\frac{1}{5}\right)^x dx - \frac{1}{5}\int\left(\frac{1}{2}\right)^{x-1}dx = \\ &= \ldots = \frac{1}{5\ln 2}2^{-x+1}-\frac{2}{\ln 5}5^{-x}+C\end{aligned}$$

Zadatak 8 Nađite integral: $\int \frac{ax+b}{cx+d}dx$, gdje $a, c \neq 0$.

Rješenje:

$$\begin{aligned}\int \frac{ax+b}{cx+d}dx &= \frac{a}{c}\int \frac{x+\frac{b}{a}}{x+\frac{d}{c}}dx = \frac{a}{c}\left[\int \frac{x+\frac{d}{c}+\frac{b}{a}-\frac{d}{c}}{x+\frac{d}{c}}dx\right] = \\ &= \frac{a}{c}\left[x+\left(\frac{b}{a}-\frac{d}{c}\right)\ln\left|x+\frac{d}{c}\right|\right]+C\end{aligned}$$

Zadatak 9 Nađite integrale:

(a) $\int \tan x dx$

(b) $\int \cot x dx$

(c) $\int \tan^2 x dx$

(d) $\int \cot^2 x dx$

Rješenje:

(a) $\int \tan x dx = \int \frac{\sin x}{\cos x}dx = -\int \frac{d(\cos x)}{\cos x} = -\ln|\cos x| + C$

(c) $\int \tan^2\ x dx = \int\left(\frac{1}{\cos^2 x}-1\right)dx = \tan x - x + C$

Zadatak 10 Nađite integrale:

(a) $\int \frac{4}{\sin^2(2x)}dx$

(b) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x}$

(c) $\int \frac{dx}{\sin x}$

(d) $\int \frac{dx}{\cos x}$

Rješenje:

(a) $\int \frac{4}{\sin^2(2x)}dx = 2\int \frac{d(2x)}{\sin^2(2x)} = -2\cot(2x) + C$

(b) $\int \frac{dx}{\sin^2 x\cos^2 x} = \int \frac{\sin^2 x+\cos^2 x}{\sin^2 x\cos^2 x}dx = \int \frac{dx}{\cos^2 x} + \int \frac{dx}{\sin^2 x} = \tan x - \cot x + C$

(c) $\int \frac{dx}{\sin x} = \int \frac{dx}{2\sin\frac{x}{2}\cos\frac{x}{2}} = \frac{1}{2}\int \frac{dx}{\tan\frac{x}{2}\cos^2\frac{x}{2}} = \int \frac{d\left(\tan\frac{x}{2}\right)}{\tan\frac{x}{2}} = \ln\left|\tan\frac{x}{2}\right| + C$

(d) $\int \frac{dx}{\cos x} = \int \frac{dx}{\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)} = \ldots = -\ln\left|\tan\left(\frac{\pi}{4}-\frac{x}{2}\right)\right| + C$

Zadatak 11 Nađite integrale:

(a) $\int x\sqrt{2-5x}dx$

(b) $\int x\sqrt{2-5x^2}dx$

Rješenje:

(a)

$$\int x\sqrt{2-5x}dx = \int -\frac{1}{5}(2-5x-2)\sqrt{2-5x}dx = -\frac{1}{5}\int(2-5x)^{\frac{3}{2}}dx + \frac{2}{5}\int\sqrt{2-5x}dx$$

$$
\begin{aligned}
&= \frac{1}{25}\int (2-5x)^{\frac{3}{2}} d(2-5x) - \frac{2}{25}\int (2-5x)^{\frac{1}{2}} d(2-5x) = \\
&= \frac{2}{125}(2-5x)^{\frac{5}{2}} - \frac{4}{75}(2-5x)^{\frac{3}{2}} + C
\end{aligned}
$$

Zadatak 12 Nađite integrale:

(a) $\int e^{3\cos x}\sin x dx$

(c) $\int \frac{2^{\arctan x}}{1+x^2}dx$

(b) $\int \frac{dx}{(\arcsin x)^2\sqrt{1-x^2}}$

Rješenje:

(a) $\int e^{3\cos x}\sin x dx = -\frac{1}{3}\int e^{3\cos x}d(3\cos x) = -\frac{1}{3}e^{3\cos x} + C$

Zadatak 13 Nađite integrale:

(a) $\int \frac{e^x}{e^x-1}dx$

(b) $\frac{dx}{3^x+2}$

Rješenje:

(b)

$$
\begin{aligned}
\int \frac{dx}{3^x+2} &= \frac{1}{2}\int \frac{3^x+2-3^x}{3^x+2}dx = \frac{1}{2}\left[\int dx - \frac{1}{\ln 3}\int \frac{d(3^x+2)}{3^x+2}\right] \\
&= \frac{1}{2}x - \frac{1}{\ln 3}\ln(3^x+2) + C
\end{aligned}
$$

Zadatak 14 Nađite integrale:

(a) $\int \frac{\sin x-\cos x}{\sin x+\cos x}dx$

(b) $\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx$

Rješenje:

(a) $\frac{\sin x+\cos x}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}}dx = \int \frac{d(\sin x-\cos x)}{\sqrt[3]{\sin x-\cos x}} = \ldots$

1.1.1 Metoda supstitucije

Ponekad možemo olakšati integriranje ako danu varijablu zamijenimo nekom prikladnijom prema slijedećem pravilu:

$$
\int f(\varphi(t))\varphi'(t)dt = \phi(t) + C \quad \Rightarrow \quad \int f(x)dx = \phi(\varphi^{-1}(x)) + C
$$

Primjetimo da smo metodu supstitucije već indirektno koristili u nekim prijašnjim zadacima.

Zadatak 1 Prigodnom supstitucijom riješite sljedeće integrale:

(a) $\int x\sqrt{1+3x^2}dx$

(c) $\int x^2 3^{x^3}dx$

(b) $\int \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2}dx$

Rješenje:

(a)

$$\begin{aligned}\int x\sqrt{1+3x^2}dx &= \left|\ t=1+3x^2 \Rightarrow dt=6xdx\ \right| = \frac{1}{6}\int\sqrt{t}dt = \frac{1}{6}\frac{2}{3}t^{\frac{3}{2}}+C= \\ &= \frac{1}{9}(1+3x^2)^{\frac{3}{2}}+C\end{aligned}$$

Napomena: Naša susptitucija ekvivalentna je donjem postupku koji smo koristili u prijašnjim zadacima:

$$\int x\sqrt{1+3x^2}dx = \int\sqrt{1+3x^2}\frac{1}{6}d(1+3x^2) = \ldots$$

(b)

$$\begin{aligned}\int x^2 3^{x^3}dx &= \left|\ t=x^3 \Rightarrow dt=3x^2dx\ \right| = \frac{1}{3}\int e^t dt = \frac{1}{3}e^t+C= \\ &= \frac{1}{3}e^{x^3}+C\end{aligned}$$

Zadatak 2 Prigodnom supstitucijom riješite sljedeće integrale:

(a) $\int\frac{dx}{\arcsin^2 x\sqrt{1-x^2}}$ (b) $\int\frac{2^{\arctan x}}{1+x^2}dx$

Rješenje:

(a)

$$\begin{aligned}\int\frac{dx}{\arcsin^2 x\sqrt{1-x^2}} &= \left|\ t=\arcsin x \Rightarrow dt=\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}\ \right| = \int\frac{1}{t^2}dt = -\frac{1}{t}+C= \\ &= \frac{1}{\arcsin x}+C\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int\frac{2^{\arctan x}}{1+x^2}dx &= \left|\ t=\arctan x \Rightarrow dt=\frac{dx}{1+x^2}\ \right| = \int 2^t dt \\ &= \frac{1}{\ln 2}2^t+C = \frac{1}{\ln 2}2^{\arctan x}+C\end{aligned}$$

Zadatak 3 Odredite sljedeće neodređene integrale:

(a) $\int\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{2\sin^2 x+\cos^2 x}}dx$ (c) $\int\frac{\cos x}{\sqrt{2\sin^2 x+\cos^2 x}}dx$

(b) $\int\frac{\sin x}{\sqrt{2\sin^2 x+\cos^2 x}}dx$

Rješenje:

(a)

$$\begin{aligned}\int\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{2\sin^2 x+\cos^2 x}}dx &= \int\frac{\sin x\cos x}{\sqrt{1+\sin^2 x}} = \left|\ t=\sin^2 x \Rightarrow dt=2\sin x\cos x\right| = \\ &= \frac{1}{2}\int\frac{dt}{\sqrt{1+t}} = \frac{1}{2}\cdot 2\sqrt{1+t}+C = \sqrt{1+\sin^2 x}+C\end{aligned}$$

(b) i (c) sami

Zadatak 4 Odredite sljedeći integral uz upotrebu navedene supstitucije:

(a) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$, supstitucija $x = t^2$

(b) $\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}}$, supstitucija $x = \sin^2 t$

Rješenje:

(a)

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} &= \left| \, x = t^2 \Rightarrow t = \sqrt{x} \text{ i } dx = 2tdt \, \right| = \int \frac{2t}{\sqrt{t^2(1-t^2)}} dt = \\ &= 2\int \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = 2\arcsin t + C = 2\arcsin\sqrt{x} + C\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int \frac{dx}{\sqrt{x(1-x)}} &= \left| \, x = \sin^2 t \Rightarrow t = \arcsin\sqrt{x} \text{ i } dx = 2\sin t\cos t dt \, \right| = \int \frac{2\sin t\cos t}{\sin t\cos t} dt = \\ &= 2\int dt = 2t + C = 2\arcsin\sqrt{x} + C\end{aligned}$$

Zadatak 5 Odredite slijedeće neodređene integrale:

(a) $\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx$ (b) $\int \frac{\ln 2x}{x\ln 4x} dx$

Rješenje:

(a)

$$\begin{aligned}\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}} dx &= \left| \, x = t^2 \Rightarrow dx = 2tdt \, \right| = \int \frac{1+t^2}{1+t} 2tdt = 2\int \frac{t^3+t}{t+1} dt \\ &= 2\int (t^2 - t + 2 - \frac{2}{1+t}) dt = \frac{2}{3}t^3 - t^2 + 4t - 4\ln(1+t) + C = \\ &= \frac{2}{3}\sqrt{x^3} - x + 4\sqrt{x} - 4\ln(1+\sqrt{x}) + C\end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned}\int \frac{\ln 2x}{x\ln 4x} dx &= \int \frac{\ln 2 + \ln x}{x(\ln 4 + \ln x)} dx = \left| \, \ln x = t \Rightarrow \frac{dx}{x} = dt \, \right| = \int \frac{\ln 2 + t}{\ln 4 + t} dt = \\ &= \int \frac{\ln 4 + t - \ln 2}{\ln 4 + t} dt = \int \left(1 - \frac{\ln 2}{\ln 4 + t}\right) dt = \\ &= t - \ln 2 \cdot \ln|\ln 4 + t| + C = \ln x - \ln 2 \cdot \ln|\ln 4 + \ln x| + C\end{aligned}$$

Zadatak 6 Odredite sljedeći integral uz upotrebu navedene supstitucije:

(a) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$, supstitucija $x = \frac{1}{t}$

(b) $\int \frac{dx}{x\sqrt{1+x^2}}$, supstitucija $x = \tan t$

Trigonometrijske supstitucije: Neka je $a > 0$.

1) Ako integral sadrži radikal $\sqrt{a^2 - x^2}$, onda obično stavljamo $x = a \sin t$ i dobivamo
$$\sqrt{a^2 - x^2} = a \cos t.$$

2) Ako integral sadrži radikal $\sqrt{x^2 - a^2}$, stavljamo $x = \frac{a}{\cos t}$ i dobivamo
$$\sqrt{x^2 - a^2} = a \tan t.$$

3) Ako integral sadrži radikal $\sqrt{a^2 + x^2}$, stavljamo $x = a \tan t$ i dobivamo
$$\sqrt{a^2 + x^2} = \frac{a}{\cos t}.$$

Zadatak 7 Primjenom trigonometrijskih supstitucija izračunajte:

(a) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$

(b) $\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} dx$

(c) $\int \sqrt{1-x^2} dx$

(d) $\int \frac{dx}{x^2\sqrt{4-x^2}}$

Rješenje:

(a)

$$\begin{aligned}
\int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx &= \left| \, x = \sin t \Rightarrow dx = \cos t dt \, \right| = \int \frac{\sin^2 t}{\cos t} \cos t dt = \int \sin^2 t dt = \\
&= \int \frac{1 - \cos 2t}{2} dt = \frac{1}{2} \int dt - \frac{1}{2} \int \cos 2t dt = \\
&= \frac{1}{2} t - \frac{1}{4} \sin 2t + C = \frac{1}{2} \arcsin x - \frac{x}{2} \sqrt{1-x^2} + C
\end{aligned}$$

(d)

$$\begin{aligned}
\int \frac{\sqrt{x^2+1}}{x} dx &= \left| \, x = \tan t \Rightarrow dx = \frac{dt}{\cos^2 t} \, \right| = \int \frac{1}{\cos t} \frac{1}{\tan t} \frac{dt}{\cos^2 t} = \\
&= \int \frac{dt}{\cos^2 t \sin t} = \int \frac{\sin^2 t + \cos^2 t}{\cos^2 t \sin t} dt = \int \frac{\sin t}{\cos^2 t} dt + \int \frac{dt}{\sin t} = \\
&= \frac{1}{\cos t} + \int \frac{dt}{2 \sin \frac{t}{2} \cos \frac{t}{2}} = \frac{1}{\cos t} + \frac{1}{2} \int \frac{\cos \frac{t}{2}}{\sin \frac{t}{2} \cos^2 \frac{t}{2}} dt = \\
&= \frac{1}{\cos t} + \frac{1}{2} \int \frac{dt}{\tan \frac{t}{2} \cos^2 \frac{t}{2}} = \frac{1}{\cos t} + \ln \left| \tan \frac{t}{2} \right| + C = \\
&= \sqrt{x^2+1} + \ln \left| \frac{-1 \pm \sqrt{1 + \tan^2 t}}{\tan t} \right| + C = \\
&= \sqrt{x^2+1} + \ln \left| \frac{-1 \pm \sqrt{1+x^2}}{x} \right| + C
\end{aligned}$$

1.1.2 Parcijalna integracija

Neka su u i v neprekidno derivabilne funkcije (svojstvo neprekidnosti nećemo ovdje pobliže objašnjavati, ono za nas znači da je funkcija "dovoljno lijepa" da se sa njom može raditi parcijalna integracija). Onda je

$$\int u dv = uv - \int v du.$$

Primjer 1 Primjenom formule za parcijalnu integraciju izračunajte

$$\int e^x \sin x dx.$$

Rješenje: Imamo

$$\begin{aligned}
\int e^x \sin x dx &= -\left(\int e^x(-\sin x)dx\right) = \left| \begin{array}{ll} u = e^x & dv = -\sin x \\ du = e^x dx & v = \cos x dx \end{array} \right| = \\
&= -\left(e^x \cos x - \int \cos x e^x dx\right) = \left| \begin{array}{ll} u = e^x & dv = \cos x \\ du = e^x dx & v = \sin x dx \end{array} \right| = \\
&= -e^x \cos x + e^x \sin x - \int e^x \sin x dx.
\end{aligned}$$

Sada primjetimo da se integral od kojeg smo krenuli pojavio sa desne strane ali sa suprotnim predznakom. Prebacimo ga na lijevu stranu i dobivamo:

$$\begin{aligned}
2\int e^x \sin x dx &= e^x \sin x - e^x \cos x \\
\Rightarrow \int e^x \sin x dx &= \frac{1}{2}(e^x \sin x - e^x \cos x) + C
\end{aligned}$$

Zadatak 2 Parcijalnom integracijom riješite:

(a) $\int x \sin x dx$

(b) $\int x \cos x dx$

(c) $\int x^2 e^x dx$

(d) $\int x \ln x dx$

Rješenje:

(a)

$$\begin{aligned}
\int x \sin x dx &= -\left(\int x(-\sin x)dx\right) = \left| \begin{array}{ll} u = x & dv = -\sin x \\ du = dx & v = \cos x dx \end{array} \right| = \\
&= -x\cos x + \int \cos x dx = -x \cos x + \sin x + C
\end{aligned}$$

(c)

$$\int x^2 e^x dx = \left| \begin{array}{ll} u = x^2 & dv = e^x dx \\ du = 2x dx & v = e^x \end{array} \right| = x^2 e^x - \int 2x e^x dx =$$

$$= \left| \begin{array}{ll} u = 2x & dv = e^x dx \\ du = 2dx & v = e^x \end{array} \right| = x^2 e^x - 2xe^x + \int 2e^x dx = x^2 e^x - 2xe^x + 2e^x + C$$

(c)

$$\begin{aligned} \int x \ln x dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \ln x & dv = xdx \\ du = \frac{dx}{x} & v = \frac{x^2}{2} \end{array} \right| = \frac{x^2 \ln x}{2} - \int x^2 \frac{1}{x} dx = \\ &= \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{1}{2} \int x dx = \frac{x^2 \ln x}{2} - \frac{x^2}{4} + C \end{aligned}$$

Zadatak 3 Riješite parcijalnom integracijom:

(a) $\int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx$ (b) $\int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$

Rješenje:

(a)

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx &= \left| \begin{array}{ll} u = x & dv = \frac{x}{\sqrt{1+x^2} dx} \\ du = dx & v = \sqrt{1+x^2} \end{array} \right| = x\sqrt{1+x^2} - \int \sqrt{1+x^2} dx = \\ &= x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{1+x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx = x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} - \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx \end{aligned}$$

Primjetimo da se početni integral pojavio sa desne strane i to sa suprotnim predznakom; prebacujemo ga na lijevi stranu i dobivamo:

$$\begin{aligned} 2 \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx &= x\sqrt{1+x^2} - \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^2}} \quad \Rightarrow \\ \int \frac{x^2}{\sqrt{1+x^2}} dx &= \frac{x\sqrt{1+x^2}}{2} - \frac{\ln(x + \sqrt{1+x^2})}{2} + C \end{aligned}$$

(b)

$$\begin{aligned} \int \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx &= \left| \begin{array}{ll} u = x & dv = \frac{x}{(1+x^2)^2 dx} \\ du = dx & v = -\frac{1}{2(1+x^2)} \end{array} \right| = -\frac{x}{2(1+x^2)} + \int \frac{dx}{2(1+x^2)} dx = \\ &= -\frac{x}{2(1+x^2)} + \frac{1}{2} \arctan x + C \end{aligned}$$

Zadatak 4 Riješite:

(a) $\int \frac{x^2-2x+5}{e^x} dx$ (b) $\int (x^3+1) \cos 2x dx$

Zadatak 5 Primjenom parcijalne integracije riješite:

(a) $\int \arcsin x dx$ (c) $\int \sqrt{a^2+x^2} dx, \quad a \neq 0$

(b) $\int x^2 \arctan x dx$

Rješenje:

(a)

$$\int \arcsin x dx = \left| \begin{array}{ll} u = \arcsin x & dv = dx \\ du = \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} & v = x \end{array} \right| = x \arcsin x - \int \frac{x}{\sqrt{1-x^2}} dx =$$
$$= x \arcsin x + \sqrt{1-x^2} + C$$

(b)

$$\begin{aligned} \int x^2 \arctan x dx &= \left| \begin{array}{ll} u = \arctan x & dv = x^2 dx \\ du = \frac{dx}{1+x^2} & v = \frac{x^3}{3} \end{array} \right| = \frac{x^3}{3} \arctan x - \frac{1}{3} \int \frac{x^3}{1+x^2} dx = \\ &= \frac{x^3}{3} \arctan x - \frac{1}{3} \int \frac{x^2}{1+x^2} \frac{1}{2} d(x^2) = \frac{x^3}{3} \arctan x - \frac{1}{6} \int \frac{x^2+1-1}{x^2+1} d(x^2) = \\ &= \frac{x^3}{3} \arctan x - \frac{1}{6} \left(\int d(x^2) - \int \frac{d(x^2)}{1+x^2} \right) = \\ &= \frac{x^3}{3} \arctan x - \frac{1}{6} (x^2 - \ln(1+x^2)) + C \end{aligned}$$

(c)

$$\begin{aligned} \int \sqrt{a^2+x^2} &= \int \frac{a^2+x^2}{\sqrt{a^2+x^2}} dx = \int \frac{a^2}{\sqrt{a^2+x^2}} dx + \int \frac{x^2}{\sqrt{a^2+x^2}} dx = \quad \text{vidi Zadatak 3 (b)} \quad = \\ &= a^2 \ln(x + \sqrt{a^2+x^2}) + \frac{x\sqrt{a^2+x^2}}{2} - \frac{a^2}{2} \ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + C = \\ &= \frac{a^2}{2} \ln(x+\sqrt{a^2+x^2}) + \frac{1}{2} x \sqrt{a^2+x^2} + C \end{aligned}$$

1.1.3 Integriranje racionalnih funkcija

Za integriranje racionalnih funkcija najčešće koristimo metodu neodređenih koeficijenata i metodu Ostrogradskog koju ovdje nećemo opisivati.

Metoda neodređenih koeficijenata: Nakon odvajanja cijelog dijela, integriranje racionalne funkcije svodimo na integriranje pravog racionalnog razlomka:

$$\frac{P(x)}{Q(x)}$$

gdje su $P(x)$ i $Q(x)$ polinomi takvi da je stupanj polinoma $P(x)$ manji od stupnja polinoma $Q(x)$. Ako je

$$Q(x) = (x-x_1)^{\alpha_1} \dots (x-x_n)^{\alpha_n}$$

gdje su $x_1, \dots, x_n$ različiti realni korijeni polinom $Q(x)$ a $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ prirodni brojevi, onda gornji razlomak možemo rastaviti na parcijalne razlomke:

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{Q(x)} &= \frac{A_{11}}{x-x_1} + \frac{A_{12}}{(x-x_1)^2} + \dots + \frac{A_{1\alpha_1}}{(x-x_1)^{\alpha_1}} + \dots \\ &\dots + \frac{A_{n1}}{x-x_n} + \frac{A_{n2}}{(x-x_n)^2} + \dots + \frac{A_{n\alpha_n}}{(x-x_n)^{\alpha_n}}. \end{aligned}$$

Neodređene koeficijente $A_{11}, A_{12}, \dots, A_{n\alpha_n}$ nalazimo tako da gornji identitet svedemo na cijeli oblik pa izjednačimo koeficijente s istim stupnjem varijable x ili tako da za x u tu istu jednadžbu uvrstimo prikladne brojeve.

Primjer 1 Izračunajte integral $\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6} dx$

Rješenje: U zadanom integralu prvo odvajamo cijeli dio:

$$\frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6} = \frac{x^2-5x+6+3}{x^2-5x+6} = 1 + \frac{3}{x^2-5x+6}$$

pa imamo

$$\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6} dx = \int dx + \int \frac{3}{x^2-5x+6} dx = x + 3\int \frac{dx}{x^2-5x+6}$$

Sada je u brojniku $P(x) = 1$ što je nižeg stupnja nego $Q(x) = x^2 - 5x + 6$ u nazivniku. Vrijedi:

$$Q(x) = x^2 - 5x + 6 = (x-3)(x-2).$$

Stoga rastavljamo naš razlomak na sljedeće parcijalne razlomke:

$$\frac{1}{x^2-5x+6} = \frac{1}{(x-3)(x-2)} = \frac{A}{x-3} + \frac{B}{x-2}.$$

Tražimo keoficijente A i B.

Prvi način: svodimo naš identitet na cijeli oblik i izjednačujemo koeficijente s istim stupnjem varijable x.

$$\begin{array}{rcl}
\dfrac{1}{x^2-5x+6} & = & \dfrac{A}{x-3} + \dfrac{B}{x-2} \quad \Big/ (x-3)(x-2) \quad \Rightarrow \\
1 & = & A(x-2) + B(x-3) \quad \Rightarrow \\
1 & = & (A+B)x - 2A - 3B \\
\text{iz čega slijedi} & & A + B = 0 \quad \text{i} \quad -2A - 3B = 1 \quad \Rightarrow \\
 & & A = 1 \quad \text{i} \quad B = -1
\end{array}$$

Drugin način: nalazimo A i B tako da uvrstimo zgodne vrijednosti za x u jednadžbi $1 = A(x-2) + B(x-3)$, npr.

$$\begin{array}{rcl}
x & = & 2 \quad \Rightarrow \quad 1 = -B \quad \Rightarrow B = -1 \\
x & = & 3 \quad \Rightarrow \quad 1 = A \quad \Rightarrow A = 1
\end{array}$$

Sada imamo:

$$\begin{array}{rcl}
\displaystyle\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6} dx & = & \displaystyle x + 3\int \frac{dx}{x^2-5x+6} = x + 3\int \left(\frac{1}{x-3} - \frac{1}{x-2}\right) dx = \\
 & = & \displaystyle x + 3\ln|x-3| - 3\ln|x-2| + C = x + 3\ln\left|\frac{x-3}{x-2}\right| + C.
\end{array}$$

Primjer 2 Nađite integral: $\int \frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2} dx$.

Rješenje: Direktnim uvrštavanjem provjerimo da 3 i -1 nisu nule polinoma u brojniku pa je, prema tome, razlomak skraćen do kraja. Rastavljamo ga na parcijalne razlomke:

$$\begin{aligned}\frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2} &= \frac{A}{x-3}+\frac{B}{(x-3)^2}+\frac{C}{x+1}+\frac{D}{(x+1)^2} \quad \Rightarrow\\ 5x^2+6x+9 &= A(x-3)(x+1)^2+B(x+1)^2+C(x-3)^2(x+1)+D(x-3)^2\end{aligned}$$

Uvrštavamo pogodne vrijednosti za x:

$$\begin{aligned}x=3 \quad &\Rightarrow \quad = \quad 5\cdot 9+6\cdot 3+9=B\cdot 16 \quad \Rightarrow \quad B=\frac{72}{16}=\frac{9}{2}\\ x=-1 \quad &\Rightarrow \quad = \quad 5-6+9=D\cdot 16 \quad \Rightarrow \quad D=\frac{8}{16}=\frac{1}{2}\end{aligned}$$

Sada vratimo dobivene vrijednosti u početnu jednadžbu i imamo:

$$2(5x^2+6x+9)=A(x-3)(x+1)^2+9(x+1)^2+C(x-3)^2(x+1)+(x-3)^2.$$

To dalje računamo i izjednačavamo koeficijente uz potencije od x:

$$\begin{aligned}10x^2+12x+18 \quad &= \quad A(x-3)(x^2+2x+1)+9(x^2+2x+1)^2+\\ &\qquad +C(x^2-6x+9)(x+1)+(x^2-6x+9)=\\ &= \quad A(x^3-x^2-5x-3)+9(x^2+2x+1)+C(x^3-5x^2+3x+9)+(x^2-6x+9)\\ \text{koeficijenti uz} \quad x^3 \quad &: \quad A+C=0\\ \text{slobodni koeficijenti} \quad &: \quad -3A+9+9C+9=18 \quad \Rightarrow \quad -3A+9C=0\\ \Rightarrow \quad & \quad A=0 \quad \text{i} \quad C=0.\end{aligned}$$

Stoga slijedi:

$$\begin{aligned}\int\frac{5x^2+6x+9}{(x-3)^2(x+1)^2}dx \quad &= \quad \int\left(\frac{9}{2(x-3)^2}+\frac{1}{2(x+1)^2}\right)dx=\\ &= \quad -\frac{9}{2(x-3)}-\frac{1}{2(x+1)}+C\end{aligned}$$

(ovdje je C u zadnjem redu kao i obično oznaka za konstantu, te nema veze za C iz rastava na parcijalne razlomke).

Zadatak 3 Riješite sljedeće integrale:

(a) $\int\frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}dx$ (b) $\int\frac{dx}{(x-1)(x+2)(x+3)}$

Rješenje:

(a) Brojnik je istog stupnja kao i nazivnik pa prvo dijelimo polinome:

$$\frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}=\frac{x^3+x+1}{x^3+x}=1+\frac{1}{x^3+x}$$

Sada imamo:

$$\int\frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)}=\int dx+\int\frac{dx}{x^3+x}.$$

Rastavljamo razlomak u drugom integralu na parcijalne razlomke:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{x^3+x} &= \frac{A}{x} + \frac{Bx+C}{x^2+1} \quad \Rightarrow \\
1 &= A(x^2+1) + (Bx+C)x \quad \Rightarrow \\
& A+B=0, \quad C=0, \quad A=1 \quad \text{pa} \quad B=-1
\end{aligned}
$$

Slijedi:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)} dx &= \int dx + \int \frac{dx}{x} - \int \frac{x}{x^2+1} dx = \\
&= x + \ln|x| - \frac{1}{2}\ln(x^2+1) + C
\end{aligned}
$$

b) Ovdje u nazivniku imamo jednu realnu, već istaknutu nultočku i polinom drugog stupnja pa odmah tražimo koeficijente:

$$
\begin{aligned}
\frac{1}{(x-1)(x^2+x+1)} &= \frac{A}{x-1} + \frac{Bx+C}{x^2+x+1} \quad \Rightarrow \\
1 &= A(x^2+x+1) + (Bx+C)(x-1) \quad \Rightarrow
\end{aligned}
$$

nakon izjednačavanja uz stupnjeve $\Rightarrow \quad A = \frac{1}{3},\ B = -\frac{1}{3},\ C = -\frac{2}{3}$

Sada imamo:

$$
\begin{aligned}
\int \frac{x^3+x+1}{x(x^2+1)} dx &= \frac{1}{3}\int \frac{dx}{x-1} - \frac{1}{3}\int \frac{x+2}{x^2+x+1} dx = \\
&= \frac{1}{3}\ln(x-1) - \frac{1}{6}\int \frac{2x+1}{x^2+x+1} - \frac{3}{6}\int \frac{dx}{x^2+x+1} dx = \\
&= \frac{1}{3}\ln(x-1) - \frac{1}{6}\ln(x^2+x+1) - \frac{1}{2}\int \frac{dx}{(x+\frac{1}{2})^2+\frac{3}{4}} dx
\end{aligned}
$$

i ovaj zadnji integral je očito arctan pa dovršite sami.